**NORMAS DE VECTORES Y MATRICES**

Al analizar entes multicomponentes como los vectores y las matrices a menudo se requiere una forma para expresar sus magnitudes, alguna medida de “grandeza “ o “pequeñez”. Para los números el valor absoluto indica que tan grande es un número, pero para vectores y matrices hay muchas componentes, cada una de las cuales puede ser pequeña ó grande en magnitud.  
Para discutir los errores en problemas numéricos que manejan vectores y matrices resulta útil recurrir a las normas, ya que son un medio, que permite medir la distancia entre los vectores y entre las matrices.

**Definición.**

1.*Una norma vectorial en* http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n* *es una función*, || ||, *de* http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n en* http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF *que satisface las siguientes propiedades:*

i) ||X|| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/mayorque.gif 0 y ||X|| = 0 si y sólo si X = 0

ii ) || Xhttp://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.GIF|| = |http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.GIF| ||X||, http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/paratodo.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/pertenece.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF y X http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/pertenece.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n*

iii ) ||X + Y|| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/menorque.gif ||X|| + ||Y||, http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/paratodo.GIF x, y http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/pertenece.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n* (Desigualdad de triángulo)

La cantidad ||X|| se llama magnitud ó longitud del vector *X*. Una distancia entre los vectores*X* e *Y* de http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n* respecto a la norma es ||*X* - *Y*||

Si *X* = (*x*1, *x*2, ...,*xn* ) entonces algunas normas son:

Norma 1: ||*X*||1 = http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image196.png (Suma de las magnitudes )

Norma 2 :||*X*||2 = http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image198.png (Norma Euclideana [8](javascript:javascript(8)))

Norma http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF: = ||*X*||http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF= http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image199.png (Norma infinita ó norma máxima magnitud).

**Ejemplo.**

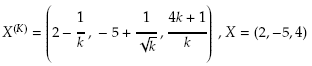
Calcular las normas 1,2 y la norma http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF para el vector   
*X* = (2, -4 , 1 )  
  
||*X*|| 1 = | 2 | + | -4 | + | 1 | = 7  
||*X*|| 2 = [ 22 + ( - 4 )2 + 12 ]1/2 = http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image202.gif http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/aproxigual.gif 4 . 58  
||*X*||http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF = máx { | 2 |, | -4 |, | 1 |} = 4

**Definición.**

2. *Se dice que una sucesión de vectores*http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image204.png*en* http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.GIF*n* *converge a* *X* *si*

http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image206.png

**Ejemplo.**

Si 

Entonces, http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image210.png

Si se calcula ||*X*(*k*) - *X* || , usando la norma infinita se puede ver que ||*X*(*k*)- *X* || ->0, cuando k ->http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF , por lo tanto *X* es el límite de la sucesión {*XK*} respecto a la norma infinita. [9](javascript:javascript(9))

**Definición.**

3. *Una norma matricial sobre el conjunto de las matrices n* x*n es una función de valor real* ,|| ||,*definida en este conjunto y que satisface para todas las matrices A y B de n* x*n y todos los números reales* http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.gif *las siguientes propiedades:*

i ) ||*A*|| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/mayorque.gif 0 y ||*A*|| = 0 si y sólo si *A* = 0

ii ) ||http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.gif*A*|| = |http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.gif| ||*A*||, http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/alfa.gif http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/pertenece.gif http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/R.gif

iii) ||*A*+*B*|| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/menorque.gif ||*A*|| + ||*B*||

iv) ||*A B*|| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/menorque.gif ||*A*|| ||*B*||

Una distancia entre las matrices *A* y *B*de *n*x*n* respecto a esta norma matricial es ||*A*-*B*||.

A continuación se dan ejemplos de normas.

Norma 1: ||*A*||1= http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image231.png (máxima suma en las columnas )

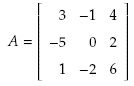
Norma http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF: ||*A*||http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF = http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image232.png (máxima suma en las filas )

Norma 2: ||*A*||2 = [http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/ro.GIF]1/2, donde http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/ro.GIF es el radio espectral de*AtA*

Norma de Frobenius: ||*A*||F= http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image236.png

**Ejemplo.**

Calcular las normas 1, http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF y de Frobenius para la matriz



Solución:

|  |  |
| --- | --- |
| Columnas | Filas |
| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image240.gif|*ai*1| = |3| + |-5| + |1| = 9 | http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image242.gif|*a*1*j*| = |3| + |-1| + |4| = 8 |
| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image240.gif|*ai*2| = |-1| + |0| + |-2| = 3 | http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image242.gif|*a*2*j*| = |-5| + |0| + |2| = 7 |
| http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image240.gif|*ai*3| = |4| + |2| + |6| = 12 | http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image242.gif|*a*3*j*| = |1| + |-2| + |6| = 9 |
| ||*A*||1 = máx{ 9 , 3, 12 } = 12 | ||A||http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image200.GIF= máx { 8, 7, 9 } = 9 |
| ||*A*||F = (32 + (-1)2 +42 +(-5)2+02+22+12+ (-2)2 + 62) ½ = http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/image246.GIF http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo2/ImagenesCapitulo2/aproximado.GIF 9. 798 | |